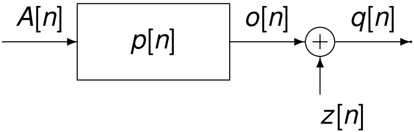
TEMA 4

DETECCIÓN EN CANALES CON INTERFERENCIA INTERSIMBÓLICA: ECUALIZADORES

Modelo General

- Definición de canal discreto equivalente

$$q[n] = A[n] * p[n] + z[n] = \sum_k A[k] \cdot p[n-k] + z[n]$$

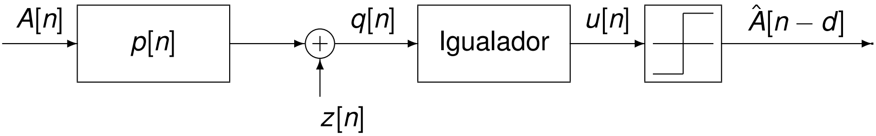


- Secuencia de símbolos $A[n]$: constelación de M puntos
  - Secuencia blanca con media nula

$$E\left[A[n]\right] = 0,\; R_A[k] = E\left[A[n+k]A^*[n]\right] = E_s \cdot \delta[k], \quad S_A\left(e^{j\omega}\right) = E_s$$

Igualadores de canal

- Complejidad exponencial del algoritmo de Viterbi
  - Hay M^K estados
  - De cada estado salen M flechas
  - A cada estado llegan M flechas
- Solución sub-óptima: Igualador de canal + decisor símbolo a símbolo



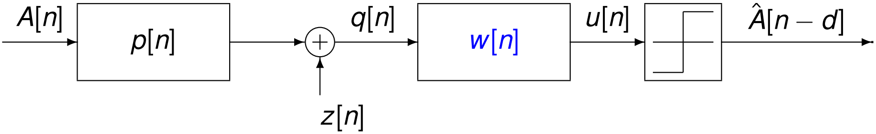
Estructuras de igualación

- Igualador lineal
  - LTE: *Linear Transversal Equalizer*
- Igualador con realimentación de decisiones
  - DFE: *Decision Feedback Equalizer*
- Otras estructuras no lineales
  - Igualador bayesiano
  - Redes neuronales (MLP. RBF, etc.)
  - Máquinas de vectores soporte
  - ...

Igualación no ciega / ciega

- Igualación no ciega
  - Se conoce el canal $p[n]$, o
  - Se dispone de una secuencia de referencia
- Igualación ciega
  - No se conoce el canal
  - No se dispone de una secuencia de referencia
  - Se dispone de información estadística sobre $A[n]$

Igualación no ciega lineal



$$u[n] = \sum_{k=0}^{K_w} w[k]q[n-k] = \mathbf{w}^T \boldsymbol{q}_n$$

- Se asume que se conoce el canal $p[n]$ y que su memoria es K_p
- Criterios de igualación
  - Forzador de ceros (ZF)
  - Mínimo error cuadrático medio (MMSE)

Igualador lineal ZF sin limitación de coeficientes

- Respuesta ideal (en el dominio de la frecuencia)

Igualador lineal ZF sin limitación de coeficientes

- Respuesta ideal (en el dominio de la frecuencia)

$$C(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})P(e^{j\omega}) = e^{-j\omega d} \rightarrow W(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega})}$$

- Densidad de potencia del ruido filtrado

Igualador lineal ZF sin limitación de coeficientes

- Respuesta ideal (en el dominio de la frecuencia)

$$C(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})P(e^{j\omega}) = e^{-j\omega d} \rightarrow W(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega})}$$

- Densidad de potencia del ruido filtrado

$$S_z^{ZF}(e^{j\omega}) = S_z(e^{j\omega}) \left| W(e^{j\omega}) \right|^2 = \frac{\sigma_z^2}{\left| P(e^{j\omega}) \right|^2}$$

- Potencia de ruido

Igualador lineal ZF sin limitación de coeficientes

- Respuesta ideal (en el dominio de la frecuencia)

$$C(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})P(e^{j\omega}) = e^{-j\omega d} \rightarrow W(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega})}$$

- Densidad de potencia del ruido filtrado

$$S_z^{ZF}(e^{j\omega}) = S_z(e^{j\omega}) \left| W(e^{j\omega}) \right|^2 = \frac{\sigma_z^2}{\left| P(e^{j\omega}) \right|^2}$$

- Potencia de ruido

$$\sigma_z^2|_{ZF} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_z^{ZF}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{\sigma_z^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\left| P(e^{j\omega}) \right|^2} d\omega$$

  - **Problema importante**: Amplificación de ruido para canales con nulos espectrales

Igualador lineal ZF con $K_w + 1$ coeficientes

- Sistema de ecuaciones dada por la respuesta conjunta del canal y del ecualizador
- Objetivo: tener una delta desplazada a la salida

$$c[n] = p[n] * w[n] = \sum_{k=0}^{K_w+K_p} p[k]w[n-k] = \delta[n-d]$$

Igualador lineal ZF con $K_w + 1$ coeficientes

- Sistema de ecuaciones dada por la respuesta conjunta del canal y del ecualizador
- Objetivo: tener una delta desplazada a la salida

$$c[n] = p[n] * w[n] = \sum_{k=0}^{K_w+K_p} p[k]w[n-k] = \delta[n-d]$$

- Sistema matricial, $\boldsymbol{P}$ tiene dims $[K_w + K_p + 1] \times [K_w + 1]$

$$\begin{bmatrix} c[0] \\ c[1] \\ \vdots \\ c[K+K_w] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p[0] & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p[1] & p[0] & 0 & \cdots & 0 \\ p[2] & p[1] & p[0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p[N] & p[N-1] & p[N-2] & \cdots & 0 \\ 0 & p[N] & p[N-1] & \cdots & p[0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p[N] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[K_w] \end{bmatrix}$$

Igualador lineal ZF con $K_w + 1$ coeficientes

- Matriz de convolución de canal $\boldsymbol{P}$

$$\mathbf{c}_d = \boldsymbol{P}\mathbf{w}$$

$$\mathbf{c}_d = [\underbrace{00\cdots0}_{d}\,10\cdots0]^T$$

- **Sistema sobre-determinado**
  - $K_p + K_w + 1$ ecuaciones
  - $K_w + 1$ incógnitas
- Solución de mínimos cuadrados

$$\mathbf{w}_d\big|_{ZF} = \arg\min_{\mathbf{w}} ||\mathbf{c}_d - \boldsymbol{P}\mathbf{w}||^2 = \boldsymbol{P}^{\#}\mathbf{c}_d$$

  - Pseudo-inversa

$$P^{\#} = (\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}^H$$

Igualador lineal ZF con $K_w + 1$ coeficientes

- La solución $\mathbf{w}_d|_{ZF} = (\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}^H\mathbf{c}_d$ no satisface todas las ecuaciones, es decir,

La respuesta conjunta $\boldsymbol{c}_d^{ZF} = \boldsymbol{P} \cdot \mathbf{w}_d^{ZF} \neq \boldsymbol{c}_d$

Igualador lineal ZF con $K_w + 1$ coeficientes

- La solución $\mathbf{w}_d|_{ZF} = (\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}^H\mathbf{c}_d$ no satisface todas las ecuaciones, es decir,

$$\text{La respuesta conjunta } \boldsymbol{c}_d^{ZF} = \boldsymbol{P} \cdot \mathbf{w}_d^{ZF} \neq \boldsymbol{c}_d$$

- Problemas:

Igualador lineal ZF con $K_w + 1$ coeficientes

- La solución $\mathbf{w}_d|_{ZF} = (\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}^H\mathbf{c}_d$ no satisface todas las ecuaciones, es decir,

$$\text{La respuesta conjunta } \boldsymbol{c}_d^{ZF} = \boldsymbol{P} \cdot \mathbf{w}_d^{ZF} \neq \boldsymbol{c}_d$$

- Problemas:
  - Sigue habiendo **ISI residual** debido a la limitación en el número de coeficientes.

Igualador lineal ZF con $K_w + 1$ coeficientes

- La solución $\mathbf{w}_d|_{ZF} = (\boldsymbol{P}^H \boldsymbol{P})^{-1} \boldsymbol{P}^H \mathbf{c}_d$ no satisface todas las ecuaciones, es decir,

$$\text{La respuesta conjunta } \boldsymbol{c}_d^{ZF} = \boldsymbol{P} \cdot \mathbf{w}_d^{ZF} \neq \boldsymbol{c}_d$$

- Problemas:
  - Sigue habiendo **ISI residual** debido a la limitación en el número de coeficientes.
  - Ruido amplificado

Igualador lineal MMSE sin limitación de coeficientes

- Primera idea desechada: minimizar la P_e (nuestro objetivo final) pero es una función muy complicada de los coeficientes del igualador (el ruido y la ISI a la salida ya no son gaussianos).

Igualador lineal MMSE sin limitación de coeficientes

- Primera idea desechada: minimizar la P_e (nuestro objetivo final) pero es una función muy complicada de los coeficientes del igualador (el ruido y la ISI a la salida ya no son gaussianos).
- Diseñar el igualador para que la secuencia sea lo más parecida posible a la secuencia de símbolos original.

Igualador lineal MMSE sin limitación de coeficientes

- Primera idea desechada: minimizar la P_e (nuestro objetivo final) pero es una función muy complicada de los coeficientes del igualador (el ruido y la ISI a la salida ya no son gaussianos).
- Diseñar el igualador para que la secuencia sea lo más parecida posible a la secuencia de símbolos original.
- En igualación, esta medida es el error cuadrático medio (MSE), esto es, minimizar la

$$E\left[|e_d|^2\right] = E\left[|[A[n-d] - u[n]|^2\right]$$

Igualador lineal MMSE sin limitación de coeficientes

- Primera idea desechada: minimizar la P_e (nuestro objetivo final) pero es una función muy complicada de los coeficientes del igualador (el ruido y la ISI a la salida ya no son gaussianos).
- Diseñar el igualador para que la secuencia sea lo más parecida posible a la secuencia de símbolos original.
- En igualación, esta medida es el error cuadrático medio (MSE), esto es, minimizar la

$$E\left[|e_d|^2\right] = E\left[|[A[n-d] - u[n]|^2\right]$$

  - El igualador no tiene por qué ser óptimo en P_e

Igualador lineal MMSE sin limitación de coeficientes

- Primera idea desechada: minimizar la P_e (nuestro objetivo final) pero es una función muy complicada de los coeficientes del igualador (el ruido y la ISI a la salida ya no son gaussianos).
- Diseñar el igualador para que la secuencia sea lo más parecida posible a la secuencia de símbolos original.
- En igualación, esta medida es el error cuadrático medio (MSE), esto es, minimizar la

$$E\left[|e_d|^2\right] = E\left[|[A[n-d] - u[n]|^2\right]$$

  - El igualador no tiene por qué ser óptimo en P_e
  - Rendimiento aceptable
  - Diseño matemático manejable

Igualador lineal MMSE sin limitación de coeficientes

- Primera idea desechada: minimizar la P_e (nuestro objetivo final) pero es una función muy complicada de los coeficientes del igualador (el ruido y la ISI a la salida ya no son gaussianos).
- Diseñar el igualador para que la secuencia sea lo más parecida posible a la secuencia de símbolos original.
- En igualación, esta medida es el error cuadrático medio (MSE), esto es, minimizar la

$$E\left[|e_d|^2\right] = E\left[|[A[n-d] - u[n]|^2\right]$$

  - El igualador no tiene por qué ser óptimo en P_e
  - Rendimiento aceptable
  - Diseño matemático manejable
  - En la práctica se usa con limitación de coeficientes

Igualador lineal MMSE sin limitación de coeficientes

- Principio de ortogonalidad lleva a

$$W(e^{j\omega}) = \frac{P^*(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega d}}{P(e^{j\omega})P^*(e^{j\omega}) + \frac{\sigma_z^2}{E_s}}$$

- Densidad espectral de potencia de ruido

$$S_z^{MMSE}(e^{j\omega}) = S_z(e^{j\omega}) \left| W(e^{j\omega}) \right|^2 = \frac{\sigma_z^2}{\left| P(e^{j\omega}) \right|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}}$$

- Potencia de ruido

$$\sigma_z^2|_{MMSE} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_z^{MMSE}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{\sigma_z^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\left| P(e^{j\omega}) \right|^2 + \frac{\sigma_z^2}{E_s}} d\omega$$

TEMA 4

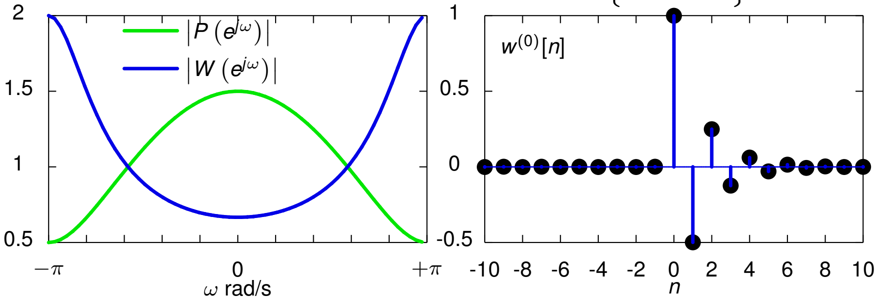
EJEMPLOS DE IGUALADORES

Igualador ZF sin limitaciones - Ejemplo - Canal A

- Canal $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n-1]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P\left(e^{j\omega}\right) = \sum_n p[n] \cdot e^{-j\omega n} = 1 + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega}, \;\; W^{(0)}\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{P\left(e^{j\omega}\right)}$$

- Respuestas del igualador sin retardo: $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1}\left\{W^{(0)}\left(e^{j\omega}\right)\right\}$

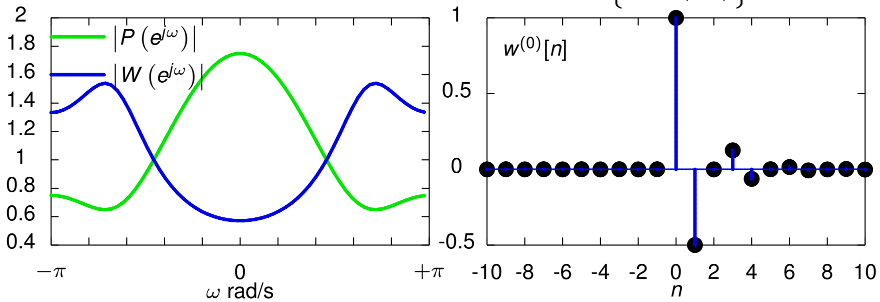


  - Respuesta causal - Retardo $d = 0$
  - Coeficientes relevantes ≈ 7 ($K_w \approx 6$)

- Canal $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n-1] + \frac{1}{4} \cdot \delta[n-2]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P\left(e^{j\omega}\right) = 1 + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega} + \frac{1}{4} \cdot e^{-j\omega 2}, \;\; W^{(0)}\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{P\left(e^{j\omega}\right)}$$

- Respuestas del igualador sin retardo: $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1}\left\{W^{(0)}\left(e^{j\omega}\right)\right\}$



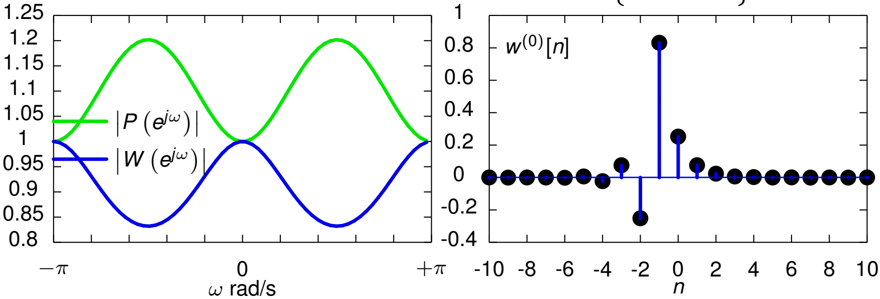
  - Respuesta causal - Retardo $d = 0$
  - Coeficientes relevantes ≈ 7 ($K_w \approx 6$)

Igualador ZF sin limitaciones - Ejemplo - Canal C

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] + \delta[n-1] - \frac{1}{3} \cdot \delta[n-2]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{3} + e^{-j\omega} - \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega 2}, \quad W^{(0)}\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{P\left(e^{j\omega}\right)}$$

- Respuestas del igualador sin retardo: $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1}\left\{W^{(0)}\left(e^{j\omega}\right)\right\}$



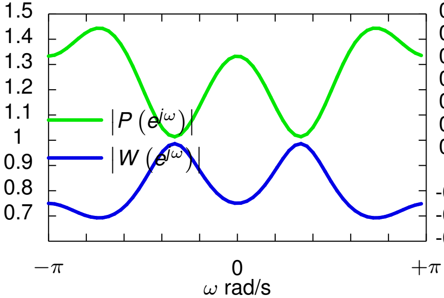
  - Respuesta no causal - retardo $d \approx 5$
  - Coeficientes relevantes ≈ 9 ($K_w \approx 8$)

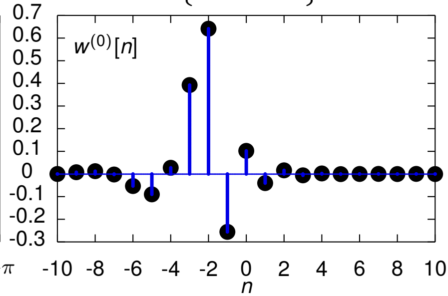
Igualador ZF sin limitaciones - Ejemplo - Canal D

- Canal $p[n] = \frac{1}{3} \cdot \delta[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n-1] + \delta[n-2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n-3]$
- Respuesta en frecuencia del canal

$$P\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega} + e^{-j\omega 2} + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega 3}, \ W^{(0)}\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{P\left(e^{j\omega}\right)}$$

- Respuestas del igualador sin retardo: $w^{(0)}[n] = \mathcal{TF}^{-1}\left\{W^{(0)}\left(e^{j\omega}\right)\right\}$





  - Respuesta no causal - retardo $d \approx 9$
  - Coeficientes relevantes ≈ 13 ($K_w \approx 12$)

Ejercicio 1

Un sistema de comunicaciones tiene el siguiente canal discreto equivalente

$$p[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2]$$

Se usa una modulación 2-PAM, $A[n] \in \{+1, -1\}$, el ruido es blanco, gaussiano y con densidad espectral de potencia $N_0/2$ y $N_0 = 2 \cdot 10^{-2}$.

a) Obtenga el igualador lineal ZF sin restricciones de complejidad y obtenga la probabilidad de error.

b) Obtenga el igualador lineal ZF con dos coeficientes y retardo $d = 1$.